株式会社ラーンズ

数学I・A　第３問(5) コ、サシス、(6) セソタチ

考察過程を振り返って、得られた結果を他の事象に活用する設問

番号によって区別された複数の球が，何本かのひもでつながれている。ただし，各ひもはその両端で二つの球をつなぐものとする。次の**条件**を満たす球の塗り分け方(以下，球の塗り方)を考える。

条件
- それぞれの球を，用意した５色(赤，青，黄，緑，紫)のうちのいずれか１色で塗る。
- １本のひもでつながれた二つの球は異なる色になるようにする。
- 同じ色を何回使ってもよく，また使わない色があってもよい。

例えば図Aでは，三つの球が２本のひもでつながれている。この三つの球を塗るとき，球１の塗り方が５通りあり，球１を塗った後，球２の塗り方は４通りあり，さらに球３の塗り方は４通りある。したがって，球の塗り方の総数は80である。

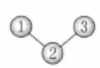


図　A

前設問の結果を活用する

(1)　図Bにおいて，球の塗り方は アイウ 通りある。

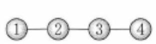


図　B

(2)　図Cにおいて，球の塗り方は エオ 通りある。

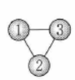


図　C

（途中省略）

(5)　図Dにおいて，球の塗り方の総数を求める。

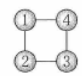


図　D(再掲)

そのために，次の**構想**を立てる。

構想

図Dと図Fを比較する。

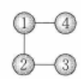
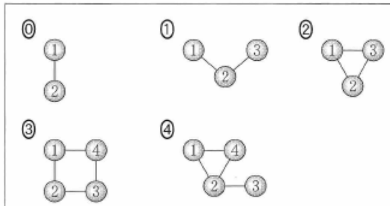


図　F

図Fでは球３と球４が同色になる球の塗り方が可能であるため，図Dよりも図Fの球の塗り方の総数の方が大きい。

図Fにおける球の塗り方は，図Bにおける球の塗り方と同じであるため，全部で アイウ 通りある。そのうち球３と球４が同色になる球の塗り方の総数と一致する図として，後の⓪～④のうち，正しいものは コ である。したがって，図Dにおける球の塗り方は サシス 通りある。

コ の解答群



⑸で構想を理解して，⑹に活用する

(6)　図Gにおいて，球の塗り方は セソタチ 通りある。

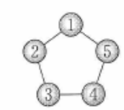


図　G

コ：2　サシス：260　セソタチ：1020

2023年度大学入学共通テスト
「数学I・A」

受験者数：	346,509人
平均点：	55.65点
標準偏差：	19.62

大学入学共通テスト

出題の特徴と共通テスト対策指導のご提案

数学Ⅰ・A

第３問(5) コ、サシス、(6) セソタチ

考察過程を振り返って、得られた結果を他の事象に活用する設問

出題の特徴

第3問は、何本かのひもでつながれた複数の球を条件を満たすように塗り分ける方法について考察する「場合の数」の問題でした。**問題文で示された求め方の構想をつかみ、さらにその構想を次の設問に活用する力が問われました。**
球のひものつながれ方が異なっていても、条件の意味を考えることで、異なる図における塗り分け方が同じであることに気付けるかどうか、またそのことから塗り分け方の総数を求める構想を理解できるかどうかがポイントになっています。

指導のご提案

共通テストでは、得られた結果や考え方の構想を他の設問に活用する力が求められます。この問題において、見かけは異なる図でも塗り分け方の総数が同じになることを考察したように、他の問題を解く際でも同様に、考察した過程や結果の意味を深く理解することが大切になってきます。
考察過程や得られた結果を他の事象に活用する力を養成するためには、**日々の演習や探究授業を通して、より簡単な条件に置き換えて考えられないか、異なる事象において共通点はないか、他の設問との関連はないかなどを意識しておきたいです。**

教材のご紹介

大学入学共通テスト
出題の特徴と共通テスト対策指導のご提案

株式会社ラーンズ

教材のご紹介…「2024共通テスト対策【実力養成】重要問題演習　数学」

考察過程を振り返って、得られた結果を他の事象に活用する設問

第38問

38　難易度 ★★☆　目標解答時間 15分　SELECT 90　SELECT 60

箱の中に10本のくじが入っており，そのうち3本が当たりくじである。このくじを10人が1本ずつ順に引くとき，次の確率を考える。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

① 3番目の人が当たりくじを引く確率
② 7番目の人が当たりくじを引く確率
③ 3番目の人と7番目の人が当たりくじを引く確率

(1) まず，①について考える。1番目，2番目，3番目にくじを引く人が当たりくじを引く事象をそれぞれ A，B，C と表し，$P(C)$ の値を求めよう。

$P(A)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。また，1番目の人が当たりくじを引いたとき，2番目の人も当たりくじを引く条件付き確率は $P_A(B)=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。さらに，1番目と2番目の人がともに当たりくじを引いたとき，3番目の人も当たりくじを引く条件付き確率は $P_{A\cap B}(C)=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であるから，

$P(A\cap B\cap C)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\times\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\times\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。他の場合も同様に考えると，$P(C)=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

しかし，同じやり方で②，③を考えることは難しい。そこで，別の試行に置き換えて考える。

(2) 10本のくじを k_1，k_2，……，k_{10} と表すことにし，k_1，k_2，k_3 が当たりくじであるとする。この10本のくじを横一列に並べる試行を考える。この試行において，くじの並べ方の総数は $\boxed{\text{サ}}$ 通りである。①について，左から3番目に当たりくじがある並べ方は $\boxed{\text{シ}}$ 通りあるから，3番目の人が当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ ${}_{10}C_3$　① ${}_{10}P_3$　② ${}_{10}P_7$　③

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ ${}_9C_2$　① ${}_9P_2$　② $3\cdot{}_9P_2$　③ ${}_9P_7$

(3) 当たりくじを○，はずれくじを●で表すことにし，3個の○と7個の●を横一列に並べる試行を考える。○と●の並べ方の総数は $\boxed{\text{ス}}$ 通りである。①について，左から3番目に○がある並べ方は $\boxed{\text{セ}}$ 通りあるから，3番目の人が当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ ${}_{10}C_3$　① ${}_{10}P_3$　② ${}_{10}P_7$　③ $10!$

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ ${}_9C_2$　① ${}_9P_2$　② $3\cdot{}_9P_2$　③ ${}_9P_7$　④ $3\cdot{}_9P_7$　⑤ $9!$　⑥ $3\cdot 9!$

◀公式・解法集 35 38 43

定価980円（税込み）

⇄

数学A　場合の数と確率

35 並べ方に制限のついた順列　共通テスト重要度

Skill 制限の強いところから考える！　集合の考え方を利用する！

順列の問題（ものを並べる問題）に対しては

❶ 制限の強いところから並べる。
❷ 状況が複雑なときは，集合を用いて状況を整理する。

という方針で臨むとよい。

Check

6個の数字0，1，2，3，4，5のうち，異なる4個を並べて4桁の自然数をつくる。

(1) 奇数は $\boxed{\text{アイウ}}$ 個できる。

(2) 2または5の倍数は $\boxed{\text{エオカ}}$ 個できる。

解答 (1) 一の位は1か3か5である。千の位は，一の位の数字と0以外の4個から1個を選べばよい。十と百の位は残りの4個から2個を選んで並べればよい。

よって　$3\times4\times{}_4P_2=3\times4\times4\cdot3=\mathbf{144}$ **(個)**

(2) つくられる4桁の自然数について，全体集合を U，2の倍数の集合を A，5の倍数の集合を B とすると，2または5の倍数の集合は $A\cup B$ であり，その補集合は $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ である。

千の位から順に数字の並べ方を考えると，つくられる4桁の自然数は全部で

$n(U)=5\cdot5\cdot4\cdot3=300$ (個)

$\overline{A}\cap\overline{B}$ は2の倍数でも5の倍数でもない自然数の集合であるから，一の位が1か3で，千の位は一の位の数字と0以外であればよい。

よって　$n(\overline{A\cup B})=n(\overline{A}\cap\overline{B})=2\times4\times{}_4P_2=2\times4\times4\cdot3=96$ (個)

したがって，2または5の倍数の個数は

$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})=300-96=\mathbf{204}$ **(個)**

つなぐ

(2)においては，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ を利用することもできるが，本問の場合は6個の数字に0が含まれているので，一の位が0のときとそうでないときに分けて考える必要があり，手間がかかる。問題に応じて，楽に求められる方法を選択しよう。

36

別冊付録
「公式・解法集」

「問題演習編」の問題には、別冊「公式・解法集」の関連する項目番号を示しています。「公式・解法集」で公式の意味を理解したり、深めたりしながら演習することができます。

「公式・解法集」を活用しながら定理・公式の理解の質を高め、3年生2学期からの本格的な実戦演習へ

「2024共通テスト対策【実力完成】直前演習　数学Ⅰ・A」（2023年6月発刊）

数学I・A　**第１問〔２〕(2) ナ**

知識の理解の質を問う設問

(1)　点 O を中心とし，半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A，B を $AB = 6$ となるようにとる。また，円 O の円周上に，2 点 A，B とは異なる点 C をとる。

(i)　$\sin \angle ACB =$ $\boxed{\text{サ}}$ である。また，点 C を $\angle ACB$ が鈍角となるようにとるとき，$\cos \angle ACB =$ $\boxed{\text{シ}}$ である。

(ii)　点 C を △ABC の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を D とするとき，$\tan \angle OAD =$ $\boxed{\text{ス}}$ である。また，△ABC の面積は $\boxed{\text{セソ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\frac{3}{5}$	① $\frac{3}{4}$	② $\frac{4}{5}$	③ 1	④ $\frac{4}{3}$
⑤ $-\frac{3}{5}$	⑥ $-\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{4}{5}$	⑧ -1	⑨ $-\frac{4}{3}$

(2)　半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P，Q，R をとったとき，これらの 3 点を通る平面 α 上で $PQ = 8$，$QR = 5$，$RP = 9$ であったとする。

球 S の球面上に点 T を三角錐（すい）TPQR の体積が最大となるようにとるとき，その体積を求めよう。

まず，$\cos \angle QPR = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であることから，△PQR の面積は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}$ である。

次に，点 T から平面 α に垂直な直線を引き，平面 α との交点を H とする。このとき，PH，QH，RH の長さについて，$\boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ。

教科書で学習した基礎知識を、条件に合わせて活用する

以上より，三角錐 TPQR の体積は $\boxed{\text{ニヌ}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}\right)$ である。

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $PH < QH < RH$	① $PH < RH < QH$
② $QH < PH < RH$	③ $QH < RH < PH$
④ $RH < PH < QH$	⑤ $RH < QH < PH$
⑥ $PH = QH = RH$	

ナ：6

2023年度大学入学共通テスト
「数学I・A」
受験者数：　346,509人
平均点：　55.65点
標準偏差：　19.62

【出典】 問題・データとも、2023年度大学入学共通テスト（本試験）より。データは「令和5年度大学入学共通テスト（本試験）平均点等一覧（中間集計その2）」のものです。

大学入学共通テスト
出題の特徴と共通テスト対策指導のご提案

株式会社ラーンズ

数学Ⅰ・A

第１問〔２〕(2) ナ

知識の理解の質を問う設問

出題の特徴

第１問〔2〕は、(1)が円周上に頂点をもつ△ABCの面積の最大値を求める問題で、(2)は、平面での考察を空間に発展させて、球面上に頂点をもつ三角錐TPQRの体積の最大値を求める問題でした。
平面と空間の条件が対応しているので、(2)は(1)と同様に考えていくことができます。
「三角形の面積が最大になるとき、頂点から底辺に引いた垂線は外接円の中心を通る」ことと同様に考えて、「三角錐の体積が最大になるとき、頂点から底面に引いた垂線は外接球の中心を通る」ことを押さえられるかどうかがポイントでした。

指導のご提案

体積が最大になるとき点Tから平面PQRに引いた垂線は球の中心を通ることから、垂線と平面との交点は△PQRの外接円の中心になりますが、このような基礎事項は、正四面体の体積などで学習済みです。
日頃の演習において、特別な条件で導かれたことが他の場合でも成り立つことなのかどうか、結論を導くために十分な条件は何か等、基本解法の理解を深めて活用力を高めておくことが大切です。

教材のご紹介

大学入学共通テスト
出題の特徴と共通テスト対策指導のご提案

株式会社ラーンズ

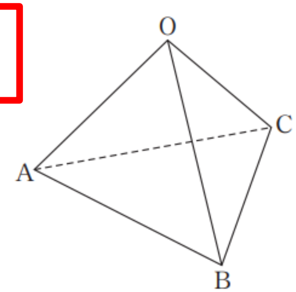
教材のご紹介…「共通テスト対策【実力養成】数学Ⅰ・A・Ⅱ・B　基礎徹底演習」

知識の理解の質を問う設問

第24問

24　難易度 ★★　目標解答時間 12分

四面体 OABC があり，$OA = OB = OC = 4$ で，△ABC の 3 辺の長さが $AB = 6$，$BC = 4$，$CA = 5$ である。



点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，その交点を P とするとき，AP の長さを求めたい。

$\cos\angle BAC = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり，$\sin\angle BAC = \dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ である。

よって，△ABC の外接円の半径の長さは $\dfrac{\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ となり，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{クケ}\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$ となる。

条件と合わせて活用できる知識として理解を深める

点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，その交点を H とする。△OAH に着目して考えると，$OH = \dfrac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{スセ}}}{\boxed{ソ}}$ であり，四面体 OABC の体積が求められる。これから，AP の長さを求めると，$AP = \dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}$ である。

解答解説

こう解く！

点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，その交点を H とすると，3 つの直角三角形△OAH，△OBH，△OCH について

$AH^2 = OA^2 - OH^2$，$BH^2 = OB$…

であり，$OA = OB = OC = 4$ であるか…

$AH^2 = BH^2 = CH^2$　よって　…

すなわち，点 H は△ABC の外接円の中心で…

この問題で押さえるべき解法のポイントがどこかがわかる

Point

前半では，三角比の基本的な正弦定理，余弦定理，面積公式等を正確に利用できることが問われている。後半では，点 H が△ABC の外接円の中心であることに気づくことがポイントである。

定価980円（税込み）

別冊付録
「公式・解法集」

「公式・解法集」を活用しながら定理・公式の理解の質を高め、3年生2学期からの本格的な実戦演習へ

「2024共通テスト対策【実力完成】直前演習　数学Ⅰ・A」（2023年6月発刊）