共通テスト対策教材〝ズバピタ〟のご紹介

2023共通テストに「2023プレパック」と同じ題材の問題が出されました

株式会社ラーンズ

題材の「複利計算」がズバピタでした

「2023プレパック」　数学Ⅱ・B　第４問「数列」

年利2%である預金口座に毎年一定額を入金したときの n 年目の初めの預金を考察する問題。

第４問　（選択問題）（配点　20）

家や車などの高額商品を購入する際，資金を借りてローンを組むことがある。ローンを返済する場合，分割して定期的に返済を行うが，返済が完了するまでの期間で利息がかかるため，返済する総額は借りた金額よりも多くなる。

次の文章は，N 万円を年利 r（$r>0$）で借り入れた場合の，利息や返済額についての説明である。

n を自然数とする。ある年の初めに N 万円を年利 r で借り入れ，n 年目の終わりに A_n 万円を返済するローンを組む。n 年目に A_n 万円を返済し終えたときの借入残高を a_n 万円とする。

例えば，N 万円を年利 r で借り入れた場合，借り入れから１年間で rN 万円の利息が加わる。借り入れた年の終わり，すなわち，１年目に A_1 万円を返済し終えたときの借入残高 a_1 万円は

$$a_1=N+rN-A_1$$
$$=(1+r)N-A_1$$

また，借入残高 a_1 万円に対して１年間で ra_1 万円の利息が加わるから，２年目に A_2 万円を返済し終えたときの借入残高 a_2 万円は，同様にして

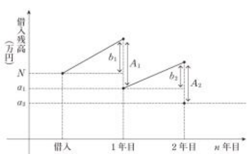
$$a_2=(1+r)a_1-A_2$$

となる。

n 年目の返済を終えたときの借入残高 a_n 万円に対して１年間でかかる利息を b_{n+1} 万円とすると，$b_{n+1}=ra_n$ であり，$b_1=rN$ とすると

$$a_1=N+b_1-A_1,\quad a_2=a_1+b_2-A_2$$

と表すこともでき，この関係を図で表すと次のようになる。



〔１〕　100 万円を年利 2%（$r=0.02$）で借り入れ，T 年目に全額を返済し終えるとする。n 年目（$1\leqq n\leqq T$）の返済金額を $A_n=10+b_n$（万円）とする場合について考えよう。

このとき

$$b_1=\boxed{ア},\quad a_1=\boxed{イウ}$$

である。

また，$1\leqq n\leqq T-1$ のとき，$a_{n+1}-a_n=-\boxed{エオ}$ であるから，$a_T=0$ となる T を求めると，$T=\boxed{カキ}$ である。

よって，支払う利息の合計は

$$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{\boxed{カキ}}=\boxed{クケ}\ (万円)$$

であることがわかる。

〔２〕　100 万円を年利 r で借り入れ，１年毎の返済額を一定の x 万円とする。

$\boxed{カキ}$ 年目に全額を返済し終えて，$a_{\boxed{カキ}}=0$ となるように返済するとき，x を r で表そう。

数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $\boxed{コ}$ $\left(1\leqq n\leqq \boxed{カキ}-1\right)$ を満たす。

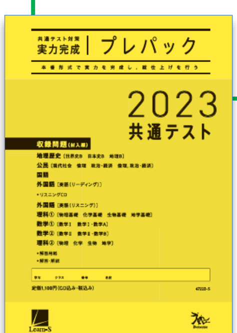
したがって，１年毎の返済額は

$$x=\frac{100r(1+r)^{\boxed{サシ}}}{(1+r)^{\boxed{サシ}}-1}\ (万円)$$

であることがわかる。

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ $a_{n+1}=r(a_n-x)$	① $a_{n+1}=(1+r)(a_n-x)$	② $a_{n+1}=ra_n-x$
③ $a_{n+1}=(1+r)a_n-x$	④ $a_{n+1}=a_n-rx$	⑤ $a_{n+1}=a_n-(1+r)x$
⑥ $a_{n+1}=a_n-x$		



2023共通テスト　数学Ⅱ・B　第４問「数列」（配点 20）

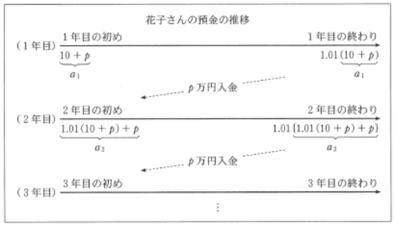
年利１%である預金口座に毎年一定額を入金したときの n 年目の初めの預金を考察する問題。

第４問　（選択問題）（配点　20）

花子さんは，毎年の初めに預金口座に一定額の入金をすることにした。この入金を始める前における花子さんの預金は 10 万円である。ここで，預金とは預金口座にあるお金の額のことである。預金には年利１％で利息がつき，ある年の初めの預金が x 万円であれば，その年の終わりには預金は $1.01x$ 万円となる。次の年の初めには $1.01x$ 万円に入金額を加えたものが預金となる。

毎年の初めの入金額を p 万円とし，n 年目の初めの預金を a_n 万円とおく。ただし，$p>0$ とし，n は自然数とする。

例えば，$a_1=10+p$，$a_2=1.01(10+p)+p$ である。



参考図

(1)　a_n を求めるために二つの方針で考える。

方針１
n 年目の初めの預金と $(n+1)$ 年目の初めの預金との関係に着目して考える。

３年目の初めの預金 a_3 万円について，$a_3=\boxed{ア}$ である。すべての自然数 n について

$$a_{n+1}=\boxed{イ}a_n+\boxed{ウ}$$

が成り立つ。これは

$$a_{n+1}+\boxed{エ}=\boxed{オ}\left(a_n+\boxed{エ}\right)$$

と変形でき，a_n を求めることができる。

$\boxed{ア}$ の解答群

⓪ $1.01\{1.01(10+p)+p\}$	① $1.01\{1.01(10+p)+1.01p\}$
② $1.01\{1.01(10+p)+p\}+p$	③ $1.01\{1.01(10+p)+p\}+1.01p$
④ $1.01(10+p)+1.01p$	⑤ $1.01(10+1.01p)+1.01p$

$\boxed{イ}$ ～ $\boxed{オ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 1.01	① 1.01^{n-1}	② 1.01^{n}
③ p	④ $100p$	⑤ np
⑥ $100np$	⑦ $1.01^{n-1}\times 100p$	⑧ $1.01^{n}\times 100p$

【出典】 2023年度大学入学共通テスト（本試験）より。

〔出題意図〕 共通テストの数列では、日常の事象の課題を漸化式を利用して解決する出題が考えられたため、漸化式を利用する題材の１つとして「複利計算」を取り上げました。**〔本書の活用で〕** 「複利計算」の問題は条件の読み取りで時間を要するため、一度取り組んだことで、試験本番では注意すべきポイントを素早く押さえられ、解答の見通しを立てるのに役立ったと思われます。**〔2024共通テストに向けて〕** 日常の事象を題材にした問題文から条件を読み取る出題については、引き続き留意しておきたいです。「プレパック」では、数学的な問題解決の過程を重視した、共通テストで求められる力を明確にした問題を収録しています。